Physique générale : quantique, Corrigé 9

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Oscillateur harmonique quantique à l'échelle macroscopique

1. Calculons d'abord l'énergie totale de l'oscillation. A l'extrémité $x = \pm\frac{L}{2}$ de l'oscillateur, cette énergie est

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{L^2}{4} = \frac{m\omega^2 L^2}{8}$$

L'énergie d'un quantum est $\Delta E = \hbar\omega$. Le nombre de quanta est donc :

$$N = \frac{U}{\Delta E} = \frac{m\omega L^2}{8\hbar} = \frac{0.1\ \text{kg} \times 2\ \text{s}^{-1} \times 0.01\ \text{m}^2}{8 \times 1.05 \times 10^{-34}\ \text{kg m}^2\ \text{s}^{-1}} = 2.38 \times 10^{30}$$

2. L'énergie de l'état fondamental est

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{1.05 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{S} \times 2\ \text{s}^{-1}}{2} \\ &\simeq 10^{-34}\text{Joules} \end{aligned}$$

Pour calculer l'amplitude $2x_0$ de l'oscillation, il faut poser cette énergie égale à l'énergie potentielle à l'extrémité de l'oscillation.

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \\ x_0 &= \sqrt{\frac{2 \times 10^{-34}\ \text{J}}{0.1\ \text{kg} \times 4\text{s}^{-2}}} \\ &\approx 2.23 \times 10^{-17}\ \text{m} = 2.23 \times 10^{-7}\dot{A} \end{aligned}$$

L'oscillation de point zéro pour cet oscillateur harmonique macroscopique est donc caractérisée par un déplacement x_0 de l'origine, de l'ordre d'un dixième de millionième de la taille d'un atome.

Exercice 2 : Le demi-oscillateur harmonique

1. Le potentiel donné impose la condition au bord $\psi(0) = 0$ pour les fonctions d'onde ψ. D'ailleurs, l'équation de Schrödinger dans la région $x > 0$ est la même que pour le cas de l'oscillateur harmonique (OH). Donc, c'est suffisant de trouver des solutions du problème de l'OH avec $\psi(0) = 0$. On sait que les fonctions paires ont les propriétés $f(-y) = f(y)$ et $f'(-y) = -f(y)$, tandis que les impaires ont les propriétés $f(-y) = -f(y)$ et $f'(-y) = f(y)$. En particulier pour les paires on a $f'(0) = 0$ et pour les impaires on a $f(0) = 0$ (par continuité). Donc les solutions impaires de l'OH (celles avec n impair) sont aussi solutions du demi-oscillateur, dans la région $x > 0$. L'équation de Schrödinger étant la même, les énergies sont les mêmes.
2. L'équation de Schrödinger étant la même que pour l'OH dans la région $x > 0$, les solutions sont un sous-espace des solutions de l'OH, fixé par la condition $\psi(0) = 0$. On a déjà démontré que les solutions impaires de l'OH sont des solutions pour le demi-oscillateur, montrons que les solutions paires de l'OH ne sont pas solutions pour le demi-oscillateur. Ces fonctions ont la propriété $\psi'(0) = 0$; si elles avaient aussi la propriété requise $\psi(0) = 0$, elles seraient nulles avec dérivée nulle dans le point $x = 0$. Donc par les propriétés des équations différentielles homogènes de deuxième ordre, elles seraient nulles partout. Donc elles ne peuvent pas avoir la propriété $\psi(0) = 0$ et elles ne sont pas solutions du demi-oscillateur.

Exercice 3 : L'oscillateur harmonique “ouvert”

1. L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est $\psi(x) = Be^{-\alpha x^2}$. Dans l'intervalle $x \in [-\infty, L]$, cette fonction doit résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}B\frac{d\left(-2\alpha x e^{-\alpha x^2}\right)}{dx} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2Be^{-\alpha x^2} = EBe^{-\alpha x^2} \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2\alpha + 4\alpha^2x^2\right)e^{-\alpha x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2e^{-\alpha x^2} = Ee^{-\alpha x^2} \\
\frac{\hbar^2\alpha}{m} - \frac{2\hbar^2\alpha^2}{u}x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Pour satisfaire cette égalité, il faut éliminer séparément les termes constants et les termes en x^2 car x^2 peut prendre un continuum de valeurs $E = \frac{\hbar^2\alpha}{m}$ et $m^2\omega^2 = 4\hbar^2\alpha^2$. Ce qui établit des liens entre α, E et ω en supposant m fixé.

Dans la région $x \in [L, \infty]$, on aura $\psi(x) = Ae^{-Cx}$ qui résout l'équation de Schrödinger pour un potentiel U constant et $E < U$. On a

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{\hbar^2}{2m}AC^2e^{-Cx} + (U_1 - E)\,Ae^{-Cx} = 0 \\
&C^2 = \tfrac{2m(U_1-E)}{\hbar^2} \\
&C = \sqrt{\tfrac{2m(U_1-E)}{\hbar^2}}
\end{aligned}$$

La fonction d'onde est donc

$$\psi(x) = \begin{cases} Be^{-\frac{mE}{\hbar^2}x^2} & x < L \\ Ae^{-Cx} & x > L \end{cases}$$

Comme vu avant, le lien entre E et ω s'obtient en éliminant α.
$E = \frac{\hbar\omega}{2}$ ou $\quad \omega = \frac{2E}{\hbar}$.

Ce résultat nous dit que, si pour ce problème on veut que l'état fondamental soit de la forme $\psi(x) \propto e^{-\alpha x^2}$ dans $x \in [-\infty, L]$, alors il faut que $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ pour que ce soit la solution de l'equation de Schrödinger. Si maintenant on veut remplir la condition au bord en $x = L$, E va devoir satisfaire une autre condition. Cela implique que ce problème n'admet de solutions que pour certaines valeurs de ω. Les conditions au bord en $x = L$ donnent :

$$Be^{-\alpha L^2} = Ae^{-CL}$$
$$-2\alpha LBe^{-\alpha L^2} = -CAe^{-CL}$$

En divisant les deux équations, on a :

$$\begin{aligned} &2\alpha L = C \\ &2\frac{mLE}{\hbar^2} = C \\ &4\frac{m^2L^2E^2}{\hbar^4} = \frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2} \\ &2\frac{mL^2E^2}{\hbar^2} + E - U_1 = 0 \\ &E^2 + \frac{\hbar^2}{2mL^2}E - \frac{\hbar^2}{2mL^2}U_1 = 0 \\ &E = -\frac{\hbar^2}{4mL^2} + \sqrt{\frac{\hbar^4}{16m^2L^4} + \frac{\hbar^2}{2mL^2}U_1} \\ &= \frac{\hbar^2}{4mL^2}\left(\sqrt{1 + \frac{8mL^2U_1}{\hbar^2}} - 1\right) \end{aligned} \tag{2}$$

qui est la condition $E = E(L, U_1)$. A remarquer que la solution avec " $-$ " donnerait $E < 0$ qui n'est pas physiquement acceptable.

La deuxième condition au bord va déterminer la constante B/A (car après une des deux constantes A ou B sera déterminée par la norme). En prenant le log de la première équation :

$$\log\frac{B}{A} - \alpha L^2 = -CL$$
$$\log\frac{B}{A} = \alpha L^2 - CL$$

mais on sait que $C = 2\alpha L$, donc

$$\log\frac{B}{A} = \alpha L^2 - 2\alpha L^2 = -\alpha L^2$$

On doit donc avoir :

$$B = Ae^{-\alpha L^2}$$

Pour conclure, le problème n'admet une solution du type indiqué dans la donnée que si :

$$\omega = \frac{2E\,(L, U_1)}{\hbar}$$

Exercice 4 : Question de type examen

Les énergies propres du système, proposé par cette équation de Schrödinger, sont celles décrites par la proposition 4.

Le terme potentiel de l'Hamiltonien proposé dans ce problème peut être réécrit en complétant le carré.

$$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \frac{\alpha}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2} \tag{3}$$

Le premier terme de ce potentiel correspond à celui d'un oscillateur harmonique centré en $x_0 = -\frac{\alpha}{m\omega^2}$. Ainsi l'équation de Schrödinger de ce problème peut être exprimée en effectuant le changement de variable $\tilde{x} = x + \frac{\alpha}{m\omega^2}$.

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\psi\left(\tilde{x}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{x}^2\psi\left(\tilde{x}\right)}_{\text{Oscillateur Harmonique}} - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}\psi\left(\tilde{x}\right) = E_n\psi\left(\tilde{x}\right) \tag{4}$$

Finalement, en utilisant l'expression pour les énergies propres de l'oscillateur harmonique, les niveaux d'énergie pour ce problème peuvent être déterminés.

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$